Résumé de probabilités

M3 - Résumé

I. Probabilités

1. Formule de Poincaré

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{i_1 \dots i_k \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} P\left(\bigcap_{j=i_1}^{i_k} A_j\right)\right)}$$

2. Probabilités conditionnelles

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

3. Probabilités composées

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\cap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)}$$

4. Formule de Bayes

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P_{A_j}(B)}}$$

5. Probabilités totales

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}$$

II. Variable aléatoire

1. Esperance

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)}$$

Théorème de transfert

$$E(g \circ X) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, P(X = x_i)$$

Propriétés

- $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

2. Variance et écart type

$$\boxed{V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$ Formule de Koenig-Huygens

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Propriétés

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P\left(X = E(X)\right) = 1$
- X^* centrée $(E = 0)$ réduite $(V = 1)$:

$$\boxed{X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}}$$

Résumé de probabilités

M3 - Résumé

III. Couples de variables aléatoires

$$\boxed{P\left((X,Y)=(x_i,y_j)\right)=P\left((X=x_i)\cap(Y=y_j)\right)}$$

$$\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1,p) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2,p) \\ X,Y \text{ indep} \end{array}\right\} \Rightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$$

$$\boxed{P(X+Y=z)=\sum_i P(X=x_i)\,P_{(X=x_i)}(Y=z-x_i)}$$

$$\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X,Y \text{ indep} \end{array}\right\} \Rightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

1. Espérance de $f(X,Y)$

$$\boxed{E\left(f(X,Y)\right)=\sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,P\left((X,Y)=(x_i,y_j)\right)}$$

Propriétés :

- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- X,Y indep $\Rightarrow$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

2. Covariance

$$\boxed{cov(X,Y)=E\left(\left(X-E(X)\right),\left(Y-E(Y)\right)\right)}$$

Propriétés :

- $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- $cov(X,X)=V(X)$
- $cov(X,Y)=cov(Y,X)$
- $cov(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y)$
  $=\lambda_1\,cov(X_1,Y)+\lambda_2\,cov(X_2,Y)$

3. Variance

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,cov(X,Y)}$$

$$V\left(\sum X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\sum_{\substack{i,j\\1\le i<j}}cov(X_i,X_j)$$

4. Coef. de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}} \qquad |\rho_{X,Y}|\le 1$$

Propriétés :

- $|\rho_{X,Y}|=1 \Leftrightarrow X$ p.s. expression linéaire de Y
- $|\rho_{X,Y}|=0 \Leftrightarrow X,Y$ non corrélés

IV. Les variables aléatoires à densité

$$X \text{ v.a. a densité de densité } f(t) \Leftrightarrow \begin{cases} F_X \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ F_X \text{ de classe } \mathcal{C}^1 < \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{(sauf en un nbr fini de pts)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=1 \\ f\ge 0 \end{cases}$$

Fonction de répartion : $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt \qquad F_X=\int f$

1. Somme de deux variables aléatoires à densité

X de densité f
Y de densité g
X,Y indep.

$Z=X+Y$ a une densité $\boxed{h(x)=f*g=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt}$

avec $*$ produit de convolution

2. Espérance (si elle existe)

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,f(t)\,dt}$$

$$\boxed{E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,f(t)\,dt}$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

3. Variance

$$V(X)=E\left(X-E^2(X)\right)$$
$$V=E(X^2)-E^2(X)$$

$$\sigma=\sqrt{V(X)}$$